



مدلسازی رفتار دینامیکی تیرهای بتنی تقویت شده بوسیله ورقهای FRP کامپوزیت

امیر اردلان موسوی خندان، گروه عمران دانشکده فنی دانشگاه تهران

سهیل محمدی*، گروه عمران دانشکده فنی دانشگاه تهران

* تلفن: ۶۱۱۲۲۵۸، شماره: ۶۴۰۳۸۰۸، پست الکترونیکی: smoham@ut.ac.ir

چکیده

در سال های اخیر تقویت وجه کششی تیرهای بتنی با ورق های FRP به عنوان یک روش پر طرفدار برای تقویت خمشی تیرها مطرح شده است. از جمله دلایل این امر، نسبتهای مقاومت به وزن و سختی به وزن بالا، مقاومت در برابر خوردگی و دوام بالای این ورقها میباشد. در این مقاله رفتار و مقاومت تیرهای تقویت شده بتنی تحت بار گذاریهای دینامیکی مورد بررسی قرار میگردد. این مقاله یک روش ترکیبی اجزاء محدود/المانهای مبتنی بر مدلسازی تیرهای بتنی تقویت شده را برای بررسی رفتار کلی خرابی این تیرها تحت بارگذاری دینامیکی ارائه میدهد و نتایج این مدلسازی را با نتایج آزمایشگاهی موجود مقایسه میکند. در این تحقیق رفتار بتن توسط مدل Drucker - Prager مدلسازی شده است. برای لایه چسبنده از یک مدل رفتاری دو خطی مبتنی بر تنش های تماسی ممانی و عمودی ایجاد شده در سطح تماس بتن و FRP استفاده شده است و گسیختگی این لایه را به نوعی تحت ترکیب مدهای شکست مختلف نتیجه میدهد. رفتار ورق CFRP تیر بصورت الاستیک اورتو تروپ فرض شده است. استفاده از تکنیکهای ترکیبی FE/DE امکان بررسی رفتار سازه را پس از ترک خوردگی فراهم میسازد و میتوان اندر کنشهای اصطکاکی غیر خطی را برای برآورد دقیق بار گسیختگی سیستم و یا تعیین پاسخ سازه تحت اثر بار دینامیکی مورد استفاده قرار داد.

کلید واژه ها: کامپوزیت، بتن، مدلسازی، لایه چسبنده، المان

۱- مقدمه

از اواسط دهه شصت، سازه های بتنی موجود در اروپا، آفریقای جنوبی، ایالات متحده و ژاپن، بوسیله چسباندن ورقهای فولادی به وجوه پایینی و کناری تیرها و دالها تقویت شدند. Meier [۱] و Kim و Meier [۲] اولین مطالعات عملی در زمینه استفاده از CFRP (carbon fiber-reinforced polymer) جهت تقویت تیرهای پلها، به خصوص پلهای کابلی، معلق و همچنین موارد دیگری که نیاز به جایگزینی ورقهای تقویتی فولادی بوسیله پانلهای کامپوزیت بود آغاز کردند. اولین استفاده واقعی از مواد کامپوزیت برای افزایش ظرفیت باربری یک ساختمان بتنی به [۳] kaiser نسبت داده شده است. مطالعات [۴-۱۰] نشان داده است که تقویت تیرهای بتنی بوسیله پانلهای CFRP چسباندن شده با اپوکسی یک راه عملی برای افزایش ظرفیت باربری تیرها و پلها است و

انتخاب یک اپوکسی مناسب برای چسباندن پانلهای CFRP به تیرها، جهت بهبود ظرفیت باربری تیریک امر ضروری می باشد. به هر حال نسبت مقاومت به وزن بالا، مقاومت در برابر خوردگی الکترو شیمیایی، شکل پذیری و کارایی خوب جهت استفاده در مناطق با دسترسی سخت، و مقاومت خستگی عالی، مزایایی هستند که باعث شده اند در بسیاری موارد که مواد معمولی از کارایی مناسب برخوردار نمی باشند، FRP بتواند یکی از انتخابهای اصلی باشد.

این مقاله به ارائه یک راه حل عددی مناسب برای مدل سازی گسیختگی در اثر جدایی ناشی از تمرکز تنش بین تیر بتنی و ورق CFRP در محیط سه بعدی با در نظر گرفتن اثر تمام مدهای گسیختگی موثر در این جدایی و مقایسه آن با نتایج آزمایشگاهی موجود می پردازد. روش پیشنهادی برای مدلسازی رفتار سه بعدی چنین سازه هایی تحت اثر بارگذاری دینامیکی کاملاً جدید بوده و نمونه آن در نشریات فنی مشاهده نگردیده است. اگر چه تحلیل های اجزاء محدود بسیاری روی تیرهای بتنی مسلح تقویت شده با ورق [۱۱-۱۶] انجام شده است، اما بدلیل پیچیدگی مساله موفقیت کمی در مدلسازی گسیختگی های ناشی از جدایی ورق بدست آمده است.

۲- مبانی مدلسازی

بررسی مشاهدات تجربی از رفتار سازه های بتنی تقویت شده بوسیله FRP سه نوع رفتار شکست و گسیختگی را نشان داده اند [۱۷]: (۱) ترک خوردگی در بتن (۲) جدایی در وجه تماس بین بتن و ورق FRP، (۳) گسیختگی FRP

۲-۱- رفتار بتن

در این تحلیل، ناحیه فشاری تیر بتنی بوسیله مدل پلاستیسیته Drucker-Prager مدل سازی شده است. [۱۸]

۲-۲- رفتار CFRP

رفتار CFRP تا رسیدن به مقاومت کششی فایبرها بصورت الاستیک خطی و اورتوتروپ فرض شده است، بطوریکه در جهت عمود بر فایبرها مقاومت کششی ورق کمتر می باشد. در نقطه گسیختگی فایبرهای کربن پاره می شوند و گسیختگی بصورت ناگهانی اتفاق می افتد. در واقع، مقاومت کششی ورقهای CFRP که فایبرها در آن در یک جهت قرار گرفته اند در جهت فایبرها بقدری زیاد است که پاره شدن آنها به ندرت اتفاق می افتد و عملاً در آزمایشهای انجام شده چنین موردی مشاهده نشد. بنابراین برای CFRP یک مدل الاستیک خطی اورتوتروپ بکار گرفته شد. [۱۵]

۲-۳- مدلسازی رفتار لایه چسبنده بین ورقهای FRP و بتن

جدایی در ناحیه ای که ورق FRP به بتن چسبیده شده است یکی از مهمترین رفتارهای گسیختگی در تیرهای بتنی تقویت شده بوسیله FRP می باشد. در عمل دو نوع جدایی مختلف در آزمایشها مشاهده شده است. نوع اول جدایی در لایه چسبنده، میتواند به عنوان مد II گسیختگی فرض شود که در این مد تنش برشی در لایه چسبنده بسیار غالب تر از تنش نرمال است. نوع دوم مربوط به ریزترکهای قطری بتن در مجاورت لایه چسبنده هستند.

در این تحلیل تمرکز بیشتری بر روی مد جدایی اول قرار داده شده است که به این منظور از مدل پیشنهادی سه بعدی Hashin [۱۹] برای پیش بینی شروع جدایی بین لایه ای بتن و FRP استفاده شده است. مدل اولیه بر پایه

پلاستیسیته مستقل از زمان به همراه نرم شدگی بنا نهاده شده است. سطح تسلیم نیز از بازنویسی معیار گسیختگی حاصل شده است.

با فرض کرنشهای کوچک ولی تغییر شکلهای بزرگ، نرخ تانسور کرنش گرین-لاگرانژ شامل یک بخش الاستیک و یک بخش غیر الاستیک است. کرنشهای غیر الاستیک از یک قانون جریان مشترک تبعیت میکنند. مدل ماده مستقل از زمان بصورت زیر خلاصه شده است:

$$\bar{\dot{E}} = \bar{\dot{E}}^{el} + \bar{\dot{E}}^{in} \quad (1)$$

$$\bar{\dot{E}}^{el} = \bar{C} \bar{\dot{S}} \quad (2) \quad [20]$$

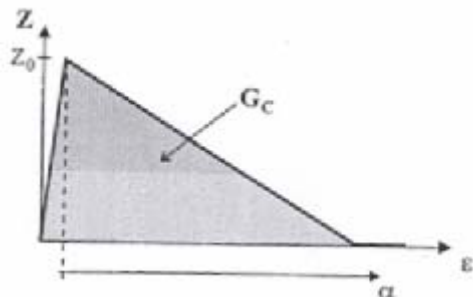
$$\bar{\dot{E}}^{in} = \bar{\dot{E}}^{pl} = \lambda \frac{\delta F}{\delta \bar{S}} \quad (3)$$

که در آن، \bar{C} تانسور الاستیسیته برای رفتار ایزوتروپیک صفحه ای ماده است. \bar{S} تانسور تنش، ضریب غیر الاستیک و F تابع تسلیم میباشد که در زیر تعریف شده است.

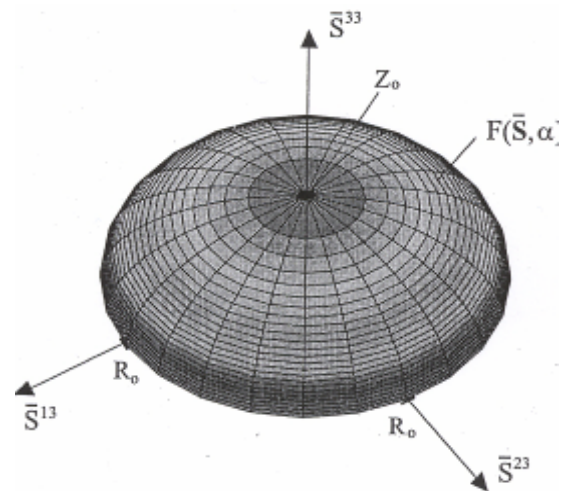
مدل جدایی Hashin تابعی از تنشهای بین لایه ای $\bar{S}^{13}, \bar{S}^{23}$ و \bar{S}^{33} ، مقاومت کششی در جهت ضخامت Z_0 و مقاومت برشی R_0 لایه است.

$$\frac{(\bar{S}^{33})^2}{Z_0^2} + \frac{(\bar{S}^{13})^2 + (\bar{S}^{23})^2}{R_0^2} \leq 1 \quad (4) \quad [20]$$

نمایش هندسی معیار در شکل (۱) نشان داده شده است. [20]



شکل ۲: تابع نرم شدگی [20]



شکل ۱: معیار جدایی هاشین [20]

سطح تسلیم $F(\bar{S}, \alpha)$ بوسیله باز نویسی معیار جدایی فوق حاصل شده است.

$$F(\bar{S}, \alpha) = g(\bar{S}) - Z(\alpha) \leq 0 \quad (5)$$

$$g(\bar{S}) = \sqrt{\bar{S}^T A \bar{S}} \quad (6) \quad , A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\frac{Z_0}{R_0})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\frac{Z_0}{R_0})^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$z(\alpha) = z_0(1 - \mu\alpha) \quad (8) \quad \text{یک تابع نرم شدگی خطی بصورت مقابل است:}$$

که در شکل (۲) نشان داده شده است. متغیر α می تواند به عنوان کرنش معادل غیر الاستیک فرض شود. پارامتر μ شیب تابع نرم شدگی $z(\alpha)$ را نشان می دهد و یک خاصیت ماده است و میتواند از نرخ رهایی انرژی بحرانی G_c ، مقاومت کششی Z_0 و پارامتری که معرف طولی از المان است، حاصل گردد.

$$\mu \approx \frac{Z_0 \times l}{2G_c} \quad (9)$$

$$\dot{\alpha} = -\dot{\lambda} \frac{\delta F}{\delta Z} \quad (10) \quad \text{نرخ تغییر متغیر } \alpha \text{ بوسیله رابطه مقابل تعریف می شود:}$$

و گرادیان تابع تسلیم بصورت زیر میباشد:

$$\frac{\delta F}{\delta \bar{S}} = \frac{1}{g(\bar{S})} A \bar{S} = N, \quad \frac{\delta F}{\delta Z} = -1 \quad (11)$$

با جایگذاری معادلات بالا در معادله (۱) تا (۳) و استفاده از الگوریتم انتگرالگیری برگشتی اولر خواهیم داشت:

$$\bar{E}_{n+1} = \bar{C}^{01} \bar{S}_{n+1} + \bar{E}_n^{p1} + \frac{\lambda}{g(\bar{S}_{n+1})} A \bar{S}_{n+1} \quad (12)$$

$$\bar{S}_{n+1} = \left[\bar{C}^{-1} + \frac{\lambda}{z(\alpha_{n+1})} A \right] [\bar{E}_{n+1} - \bar{E}_n^{p1}] \quad (13) \quad , \quad \bar{S}_{n+1} = P \bar{E}^{tr} \quad (14)$$

اندیس n مربوط به مقادیر در گام زمانی t_n و اندیس $n+1$ مربوط به مقادیر در گام زمانی t_{n+1} است. دوباره پارامتر α بوسیله یک انتگرال گیری برگشتی اولر بدست می آید.

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \lambda \quad \text{پس از (15) انجام}$$

$$\bar{D} = P - \frac{PN(PN)^T}{N^T PN + H} \quad \text{مقداری محاسبات جبری، ماتریس سختی الاستوپلاستیک بصورت زیر بدست می آید..}$$

$$, H = \frac{Z'}{1 - \lambda \frac{z'}{z}} \quad (16)$$

که در آن $Z' = -\mu$ است.

۲-۴ الگوریتم تعیین سختی الاستوپلاستیک

$$1. \quad \bar{E}_{n+1} = T_E E_{n+1} \quad \text{انتقال به سیستم مختصات محلی}$$

$$2. \quad t_{n+1} = t_n + \Delta t \quad \text{افزایش گام زمانی}$$

$$\bar{E}^{tr} = \bar{E}_{n+1} \quad , \quad \bar{S} = \bar{C} E^{tr}$$

$$3. \quad F(\bar{S}, \alpha_n) \leq 0 \quad \text{حالت الاستیک}$$

$$4. \quad \lambda_1 = 0, \alpha = \alpha_n$$

۵. -آغاز محاسبه تنش در مرحله الاستوپلاستیک :

$$z' = z'(\alpha_n), z = z(\alpha_n) - i$$

$$P_n = \left[\bar{C}^1 + \frac{\lambda_n}{Z_n} A \right]^{-1} \quad \text{-ii}$$

$$N_n = \frac{1}{g_n} A \bar{S}_n, \quad g_n = \sqrt{\bar{S}_n^T A \bar{S}_n}, \quad \bar{S} = P_n \bar{E}^{tr} \quad \text{-iii}$$

$$F' = - \left[\frac{g_n}{z_n} (1 - \lambda_n \frac{Z'_n}{Z_n}) N_n^T P_n N_n + Z'_n \right], \quad F_n = g_n - z_n \quad \text{-iv}$$

$$\Delta \lambda = - \frac{F_n}{F'_n} \quad \text{-v}$$

$$| \Delta \lambda | \leq \text{Tol} \quad \Leftarrow \text{برگشت به گام (viii)} \quad \text{-vi}$$

$$n = n + 1, \alpha_{n+1} = \alpha_n + \lambda_{n+1}, \lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta \lambda \quad \text{-vii}$$

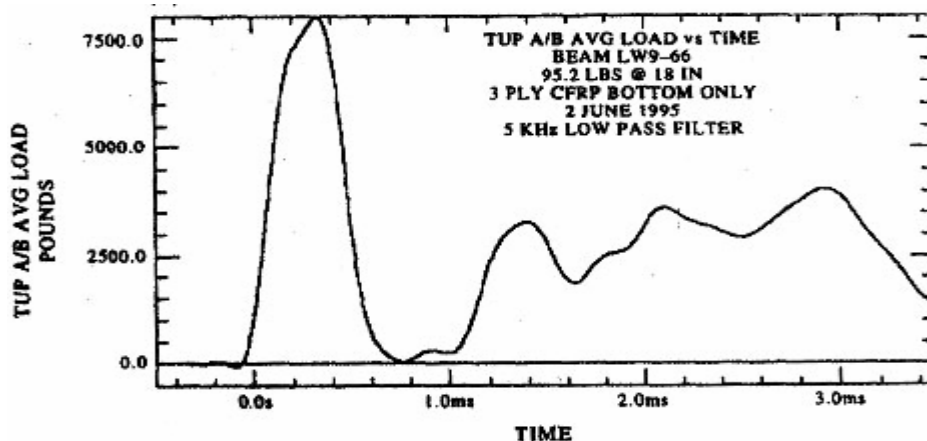
$$D_n = P_n - \frac{P_n N_n (P_n N_n)^T}{N_n^T P_n N_n + H_n}, \quad H_n = \frac{Z'_n}{1 - \lambda_n \frac{Z'_n}{Z_n}} \quad \text{-viii}$$

۳- کنترل الگوریتم و مدلسازی های عددی

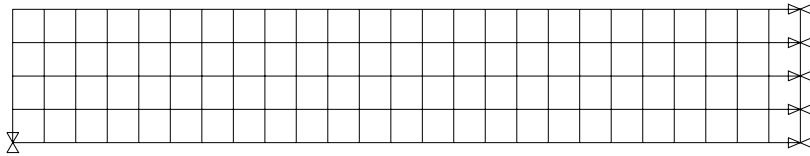
۳-۱- تشریح کامل مسأله و مشاهدات تجربی

به منظور بررسی صحت جوابهای حاصل از الگوریتم فوق یک تست آزمایشگاهی که شامل بارگذاری دینامیکی روی تیرهای بتنی تقویت شده بوسیله CFRP بوده است [۱۵]، برای مدلسازی عددی انتخاب گردیده است. اندازه تیر با تکیه گاه مفصلی ساده استفاده شده در این آزمایش $(7.62 \times 7.62 \times 76.2 \text{ cm}) 3 \times 3 \times 30 \text{ in}$ و بدون استفاده از هرگونه فولاد کششی بوده است، در عوض تیرها بوسیله CFRP، تقویت خارجی شدند. تمام پانلهای CFRP بصورت پانلهای با اندازه $(7.62 \times 76.2 \text{ cm})$ و بصورت سه لایه ای بودند و ماده چسبنده استفاده شده thixotropic اصلاح شده با دو بخش epoxy بود.

برای تعیین رفتار دینامیکی تیرهای تقویت شده با پانلهای CFRP، از یک سری آزمایشهای drop-weight بصورت تک نقطه ای استفاده شد. منحنی بار گذاری دینامیکی اعمال شده، از یک سری سیگنال خروجی ولتاژ-زمان مربوط به کرنش سنج های با مقاومت الکتریکی بدست آمد که بصورت شکل ۳ می باشد. همچنین خصوصیات بتن و ورقهای CFRP استفاده شده در این آزمایش در جدول (۱) و (۲) آمده است.



شکل ۳: منحنی بار-زمان استفاده شده برای مدلسازی تیر بتنی، با سه لایه CFRP در زیر آن [۱۵].



شکل (۴): نمایش نحوه‌المان بندی نصف تیر و شرایط مرزی آن

سر انجام مشاهدات بعمل آمده از این آزمایش نشان داد گسیختگی تیرهای تقویت شده با ورق کششی CFRP بصورت گسیختگی خمشی بتن در تقریباً "وسط دهانه تیر و به دنبال آن جدایی و گسیختگی ورقهای CFRP بود. [۱۵]

جدول ۲. خواص ماده ورق CFRP

2206.9Mpa	مقاومت کششی 0°
137.9Gpa	مدول کششی 0°
60%	حجم فایبر
0.4953mm	ضخامت ورق سه لایه عمل آمده
1577.25kg/m ³	ρ (جرم حجمی)

جدول ۱. پارامترهای مدل بتن

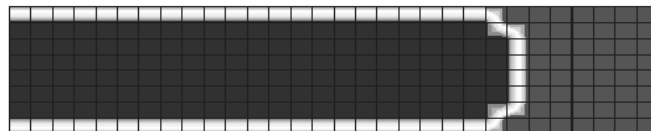
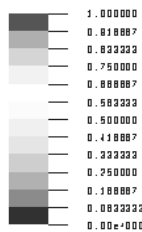
2.4×10^4 Mpa	E_0 (مدول مماسی ابتدایی)
0.2	ν (ضریب پواسون)
4.35 Mpa	f_t (مقاومت کششی تک محوری)
46.4 Mpa	f_c (مقاومت فشاری حداکثر تک محوری)
39.5 Mpa	σ_u (مقاومت فشاری نهایی تک محوری)
1892.7 kg/m ³	ρ (جرم حجمی)

۳-۲- مدلسازی عددی و بررسی نتایج

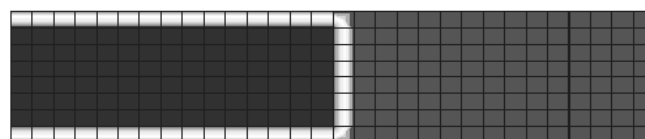
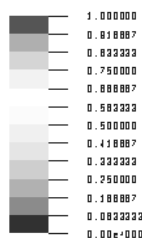
با توجه به متقارن بودن هندسه و وضعیت بارگذاری نیمی از تیر با شرایط مرزی مناسب مطابق شکل (۴) مدلسازی شده است. برای مدلسازی ورق FRP و بتن از المانهای ۸ گرهی مکعبی سه بعدی استفاده شد. برای تیر بتنی مجموعاً از ۴۰۰ المان و برای ورق CFRP نیز از ۷۲۰ المان استفاده شد. همچنین برای مدلسازی لایه چسبنده از الگوریتم شرح داده شده در قالب روش اجزاء مجزا استفاده شد. مشخصات بتن و FRP استفاده شده در مدلسازی در جداول (۱) و (۲) ذکر گردیده است برای چسبنده اپوکسی، اطلاعات محدودی از آزمایشها در دسترس است. خواص مشخصه، مانند نرخ رهایی انرژی شکست در لایه تماس بین بتن و FRP در دو مد نرمال و مماسی هر دو 0.5 N/mm و مقاومت چسبندگی نهایی در هر دو مد 2Mpa در نظر گرفته شده اند. بطوریکه در شکل (۵) مشاهده میشود جدایی ورق از زیر تیر بتنی تقریباً در ۴۷۰ μs و از وسط تیر آغاز شد و به سرعت به سمت تکیه گاه گسترش یافت بطوریکه در ۷۵۰ μs تقریباً نصف طول ورق از زیر تیر جدا شده بود. همانطور که از مشاهدات تجربی بر می آید گسیختگی تیر در ۷۳۰ μs اتفاق افتاده است [۱۵]، که تطابق خوبی را با نتایج مدلسازی ناشی از جدایی ورق نشان میدهد. بطوری که در این گام زمانی مشاهده میشود، بتن در وسط تیر نیز به حد پلاستیک رسیده و تنش اصلی حداکثر در وسط تیر از مقاومت کششی بتن فراتر رفته است که نشان دهنده وقوع ترکهای خمشی در وسط تیر است. با اتفاق افتادن جدایی ورقها تا تقریباً نصف طول آنها در حدود ۷۵۰ μs به همراه وقوع ترکهای خمشی، میتوان یک برداشت منطقی از گسیختگی تیر داشت که در تطابق خوبی با نتایج تجربی بدست آمده از آزمایش میباشد.

شکل (۷) تغییر مکان وسط دهانه تیر را در زمانهای مختلف تحلیل دینامیکی نسبت به تحلیلهای موجود مقایسه می نماید که نقاط مربعی شکل نشان داده شده نتایج حاصل از مدلسازی انجام شده در این تحقیق است. با توجه به

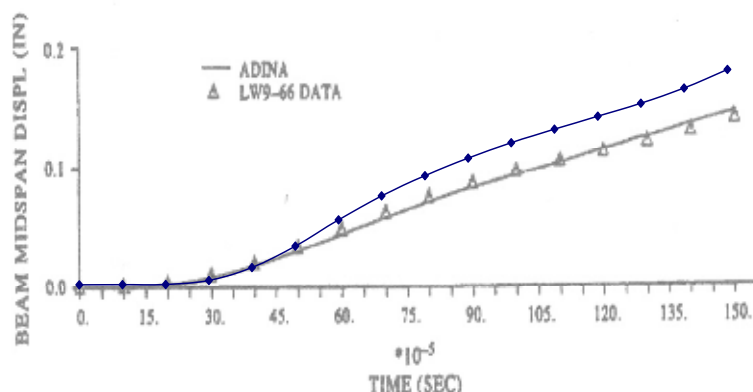
بیشتر بودن تغییر مکانهای بدست آمده نسبت به تغییر مکانهای موجود میتوان نتیجه گرفت که تیر مدلسازی شده در این تحقیق دارای سختی کمتری نسبت به تیر واقعی می باشد. تطابق نسبی تغییر مکان وسط دهانه و همچنین زمان گسیختگی تیر، نشانگر کارایی روش استفاده شده در مدلسازی میباشد. البته تغییر شیب منحنی زمان - تغییر مکان که دقیقاً "همزمان با آغاز جدایی ورق شروع شده و با پایان جدایی به حد ثابتی میرسد را میتوان ناشی از تغییر سختی کل تیر در هنگام جدایی و پس از آن دانست. شکلهای (۵) و (۶) نیز محدوده جداشدگی لایه FRP از بتن را در زمان های $470 \mu s$ و $750 \mu s$ نشان میدهند، که قسمت نشان داده شده با رنگ خاکستری روشن نمایانگر بخش جدا شده میباشد.



شکل (۵): میزان جداشدگی لایه FRP از بتن در زمان $470 \mu s$



شکل (۶): میزان جداشدگی لایه FRP از بتن در زمان $750 \mu s$



شکل (۷): تغییر مکان وسط تیر در زمانهای مختلف [۱۵]

۴- نتیجه گیری

در این مقاله، روشی بر مبنای استفاده توأم از المانهای محدود/المانهای مجزا برای بررسی رفتار گسیختگی و جدشدگی لایه FRP از سازه بتنی پیشنهاد گردیده است. در این روش معیار هاشین برای شروع گسیختگی ناشی از جدایی ورق مورد استفاده قرار گرفته است. کنترل عملکرد برنامه بر مبنای مدلسازی یک تست واقعی نشان داده است که روش پیشنهادی بصورت قابل اطمینانی برای بررسی رفتار سازه های تقویت شده با FRP که تحت اثر بارهای دینامیکی قرار دارند، قابل استفاده میباشد.

۵- مراجع

1. Meier, U., Bridge repair with high performance composite materials. Material und Technik (in German), 1978,4, 125-128.
2. Meier, U., Bridge repair with high performance composite materials. Material und Technik (in German), 1978,4, 125-128.
3. Kim, P. and Meier, U., CFRP cables for large structures. Advance Composite Materials in Civil Engineering Structures. In Proceedings of the Materials Division, ASCE, Las Vegas, NV, 1991, pp. 233-244.
4. Kaiser, H., Strengthening of reinforced concrete with epoxy-bonded carbon fiber plastics. Doctoral dissertation, ETH, 1989 (in German).
5. Meier, U., Carbon fiber-reinforced polymers: modern materials in bridge engineering. Structural Engineering International 1992, January, 7-12.
6. Meier, U., Deuring, M., Mier, H. and Schwegler, G., Strengthening of structures with CFRP laminates: research and application in Switzerland. In Advanced Composite Materials in Bridges and Structures, eds K. W. Neale and P. Labossiere, CSCE, 1992, pp. 243-251.
7. Deuring, M., External reinforcement of concrete structures with prestressed FRP. Swiss Federal Laboratories for Materials Testing and research, Report Number 224, Dubendorf, Switzerland, 1993 (in German).
8. Meier, U., Reinforcement of structures with fibrous composite materials. VDI Report Number 1080, Dubendorf, Switzerland, 1994 (in German).
9. Triantafillou, T. C., Kim, P. and Meier, U., Optimization of hybrid aluminum /CFRP box beams. International Journal of Mechanics and Science, 1991, 33, 729-739.
10. Triantafillou, T. C., Meier, U., Innovative design of FRP combined with concrete. In Advanced Composite Materials in Bridges and Structures, eds K. W. Neale, and P. Labossiere. CSCE, 1992, pp. 491-500.
11. Triantafillou, T. C., Deskovic, N. and Deuring, M., Strengthening of concrete structures with prestressed fiber reinforced plastic sheets. American Concrete Institute Structural Journal, 1992, 89, 235-244.
12. Zhang S, Raoof M, Wood LA. Prediction of peeling failure of reinforced concrete beams with externally bonded plates. Proceedings of the Institution of Civil Engineers. Struct Build 1997;122:493-6.
13. Ziraba YN. Computational model for reinforced concrete beams strengthened by epoxy bonded steel plates. Finite Elem Anal Des 1995;12(4):203-19.
14. Arduini M, Tommas AD, Manfroni O. In: Taerwe L, editor. Fracture mechanism of concrete beams bonded with composite plates. Non-metallic (FRP) reinforcement for concrete structures. E&FN Spon: RILEM, 1995. P. 484-91.
15. He JH, Pilakoutas K, Waldron P. Analysis of externally strengthening RC beams with steel and CFRP plates. Proc. 7th int conf. On structural faults and repairs 1997; Edinburgh, 83-92.
16. Jerome DM, Ross CA. Simulation of the dynamic response of concrete beams externally reinforced with carbon-fiber reinforced plastic. Comput struct 1997;64(5/6): 1129-53.
17. Rahimi R, Hutchinson A. Concrete beams strengthening with externally bonded FRP plates. ASCE J Compos Constr 2001;5(1):44-56.

18. Zhishen WU, Jun Yin , Fracturing behaviors of FRP-strengthened concrete structures , Engineering Fractures to (2003) 1339-1355.
19. Hedog NTV and Zhishen WU, Peeling off ceriterion for FRP-Strengthened R/C Flexural, FRP composite in Civil Engineering, J. G. Teng (Ed.) 2001.
20. Z.Hashin , Faiure criteria for unidirectional composites, J. for Applied Mechanics 47 (1980) 329-334.
21. W.Sprenger , F. Gruttmann, W. Wagner, Delimitation growth analysis in laminated structures with continuum – based 3D –shell elements and a viscoplastic softening model comput. Methods Appl.Mech. Engrg.185(2000)123-139.