



مدل عددی المان مرزی در تحلیل تراوش در بدنه سد خاکی به همراه پی لایه‌ای و سپری

بهزاد عطایی آشتیانی، استادیار دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شریف*

الهام شریفی، دانشجوی کارشناسی ارشد سازه‌های هیدرولیکی دانشگاه صنعتی شریف**

* تلفن: ۰۲۱-۶۱۶۴۲۳۶-۰۲۱، شماره: ۰۲۱-۶۰۱۴۸۲۸، پست الکترونیکی: ataie@Sharif.edu

** تلفن: ۰۲۱-۲۳۶۰۸۱۸-۰۲۱، شماره: ۰۲۱-۶۰۱۴۸۲۸، پست الکترونیکی: Sharifi@mehr.Sharif.edu

چکیده:

تحلیل تراوش در سد خاکی مسأله بسیار قدیمی است، اما هنوز هم یک راه حل تحلیلی و دقیق که بتواند انواع مختلف سدهای خاکی متداول روی فونداسیون‌های مختلف را پوشش دهد، وجود ندارد. با پیشرفت روزافزون علوم کامپیوتری و همچنین به علت آنکه راه حل‌های تحلیلی محدود به شرایط ساده‌ای مانند محیط همگن و هندسه ساده است، روشهای عددی جایگزین روشهای تحلیلی شده‌اند. یکی از روشهای عددی که با توجه به ویژگیهای آن برای حل عددی مسیر تراوش در سدهای خاکی بسیار مؤثر است، روش المانهای مرزی می‌باشد. در این مقاله توسعه یک مدل عددی بر اساس روش المانهای مرزی جهت تحلیل تراوش در سدهای خاکی همراه با پی لایه‌ای و سپری ارائه می‌گردد. مدل عددی تهیه شده با نتایج نرم‌افزار Mseep که از روش المانهای محدود استفاده می‌کند، مقایسه شده و صحت و دقت نتایج به دست آمده، تایید می‌گردد.

کلید واژه‌ها: تراوش، روش المان مرزی، سد خاکی، محیط متخلخل

۱- مقدمه

جریان زه در بدنه و شالوده خاکریز در بسیاری از موارد منجر به خرابی می‌شود. به منظور مقابله با این خرابیها باید دید صحیحی نسبت به تراوش و مسیر آن در خاکریزها حاصل نمود. حل تحلیلی مسیر تراوش در محیط‌های متخلخل توسط محققین مختلفی بررسی شده است، ولی به علت آنکه این راه‌حلها محدود به شرایط ساده‌ای مانند محیط همگن و هندسه ساده است و همچنین با پیشرفت روزافزون علوم کامپیوتری، روشهای عددی

برای تحلیل مسیر تراوش مورد توجه قرار گرفته‌اند که اصلی‌ترین این روشها عبارتند از روش تفاضلهای محدود، روش المانهای محدود و روش المانهای مرزی. [۱]

روش المانهای مرزی از دهه ۱۹۸۰ توسعه یافت. این روش در بسیاری از مسائل کاراتر از دو روش دیگر می‌باشد، زیرا با کاربرد این روش یک بعد از ابعاد مسأله کاسته شده و به این دلیل در زمان آماده‌سازی اطلاعات ورودی، حافظه مورد نیاز کامپیوتری برای انجام محاسبات و زمان انجام محاسبات صرفه‌جویی قابل ملاحظه‌ای صورت می‌گیرد. [۲]

۲- معادلات حاکم :

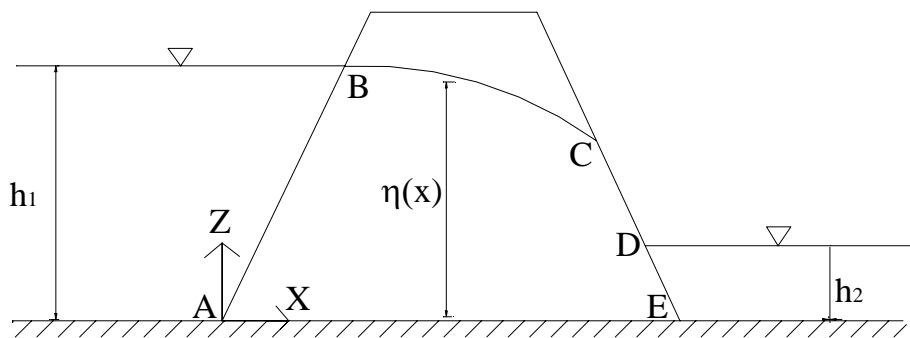
اگر محیط متخلخل، همگن و ایزوتروپ باشد، با ترکیب قانون داریسی و معادله پیوستگی برای جریان در حالت تراوش داریم: [۳]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \varphi = 0 \quad (1)$$

φ - همان معادله لاپلاس می‌باشد.

برای تعیین سطح تراش در سد خاکی باید معادله لاپلاس حل شود که برای حل معادله لاپلاس داشتن شرایط مرزی الزامی است.

شکل ۱- شمای کلی یک سد خاکی و سطح تراوش را در آن نشان می‌دهد که سطح آب بالادست سد h_1 و سطح آب پایین دست h_2 می‌باشد.



شکل ۱- شمای کلی یک سد خاکی و مرزهای آن و سطح تراوش در آن

با توجه به شکل ۱، شرایط مرزی زیر برقرار است: [۴]

$$AB: \varphi = h_1 \quad DE: \varphi = h_2 \quad CD: \varphi = z \quad AE: \frac{\delta \varphi}{\delta n} = 0 \quad (2)$$

سطح آزاد یک خط جریان برای جریان دائم است، بنابراین در طول سطح آزاد شار نرمال وجود ندارد. در

نتیجه: [۴]

$$BC: \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \\ \varphi = \eta \end{cases} \quad (3)$$

۳- روش المانهای مرزی :

برای حل معادله لاپلاس با استفاده از روش المانهای مرزی، یک تابع وزنی W در $\nabla^2 \varphi$ ضرب شده و روی کل دامنه انتگرال گیری شده و مساوی صفر قرار داده می شود. که مطالب و روابط این فصل با توجه به مرجع [۴] نوشته شده است.

$$\int_{\Omega} W \nabla^2 \varphi \, d\Omega = 0 \quad (4)$$

W - تابع وزنی، Ω - دامنه ای که انتگرال روی آن گرفته می شود.
با کاربرد قضیه گرین داریم :

$$\alpha \varphi(p) = \int_{\Gamma} \left[\varphi(Q) \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial \varphi(Q)}{\partial n} \right] d_{\Gamma} \quad (5)$$

Γ - مرز ناحیه مورد بررسی، P - نقطه ای انتخابی روی مرز یا درون ناحیه یا خارج آن، که تابع وزنی w با توجه به فاصله از این نقطه تعریف می شود، Q - نقطه ای که برای گرفتن انتگرال روی مرز تغییر می کند، α - زاویه ای که با مکان P مطابقت دارد. اگر P درون ناحیه باشد $\alpha = 2\pi$ ، اگر خارج ناحیه باشد $\alpha = 0$ ، اگر روی مرز هموار باشد $\alpha = \pi$ و اگر روی مرز غیرهموار باشد، α زاویه داخلی مرز در نقطه p می باشد.

در حالت دوبعدی برای روش المانهای مرزی داریم :

$$W = L_n(r) \quad (6)$$

r - [L] فاصله نقطه P از نقطه Q

با کاربرد معادله (۶) در معادله (۵) داریم :

$$\alpha \varphi(p) = \int_{\Gamma} \left[\varphi(Q) \frac{\partial(L_n(r))}{\partial n} - L_n(r) \frac{\partial \varphi(Q)}{\partial n} \right] d_{\Gamma} \quad (7)$$

برای هر نقطه روی مرز با انتخاب کردن آن نقطه به عنوان P ، یک معادله وجود دارد و همچنین با داشتن شرایط مرزی یا φ یا $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ و یا یک رابطه ای بین آنها مشخص است، بنابراین به تعداد نقاط روی مرز معادله و به همان تعداد مجهول وجود دارد و می توان مجهولات روی مرز را بدست آورد. آنگاه با داشتن φ و $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ روی مرز می توان φ و $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ در هر نقطه داخلی را بدست آورد.

معادله انتگرال روی کل مرز را می توان به انتگرال هایی روی المانها تبدیل کرده و یا جمع بستن این

انتگرال ها و تغییر P_i یک سیستم معادلات جبری برای φ_j و $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_j$ بدست آورد.

$$\sum_{j=1}^n R_{i,j} \varphi_j = \sum_{j=1}^n L_{i,j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_j \quad i=1,2,\dots,N \quad (8)$$

$R_{i,j}$ - ضریب φ_j در معادله i ام که تابعی از مختصات نقاط $i, j, j+1$ و $j-1$ می باشد، $L_{i,j}$ - ضریب $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_j$ در معادله i ام که تابعی از مختصات نقاط $i, j, j+1$ و $j-1$ می باشد.

برای سطح آزاد معادله (۹) برقرار است: [۵]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{K}{\cos \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (9)$$

β - زاویه بین سطح آزاد و خط افق در هر نقطه، $K - \left[\frac{L}{T} \right]$ ضریب هدایت هیدرولیکی

با گسسته سازی، معادله ۹ به معادله ۱۰ تبدیل می شود:

$$\varphi^{k+1} = \varphi^k - \frac{K \Delta t}{\cos \beta} \left[\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^{k+1} + (1-\theta) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^k \right] \quad (10)$$

θ - فاکتور وزنی برای مشتق بین زمان $k \Delta t$ و $(k+1) \Delta t$ و $K - \left[\frac{L}{T} \right]$ ضریب هدایت هیدرولیکی، k - گام زمانی

معادله ۱۰ یک رابطه بین φ و $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ در گام زمانی $k+1$ روی سطح آزاد مشخص می کند. بنابراین معادله

لاپلاس را می توان با داشتن شرایط مرزی حل کرد و φ و $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ را روی مرزها بدست آورد. کاری که باید انجام

شود آنست که ابتدا سطحی برای سطح تراوش در سد خاکی فرض شود و سپس با شرایط مرزی، سطح آزاد جدید بدست آید و آنقدر این عمل تکرار شود تا سطح آزاد واقعی بدست آید. شرط سطح آزاد واقعی آنست که

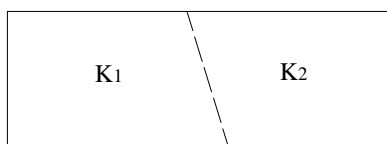
معادله $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ روی آن برقرار شود.

اگر خاکریز همگن نباشد و از چند ناحیه با نفوذپذیری مختلف تشکیل شده باشد، در مرز بین لایه ها هم φ

و هم $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ مجهول است و بنابراین باید معادلات دیگری که معادلات سازگاری بین لایه ها هستند بدست آورد.

شکل ۲، یک دامنه غیر همگن که از دو ناحیه با ضریب هدایت هیدرولیکی مختلف تشکیل شده است،

نشان می دهد.



شکل ۲- دامنه ای با دو ناحیه با ضریب هدایت هیدرولیکی مختلف

با توجه به شمل (۲) روی مرز مشترک دو ناحیه داریم: [۵]

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (11)$$

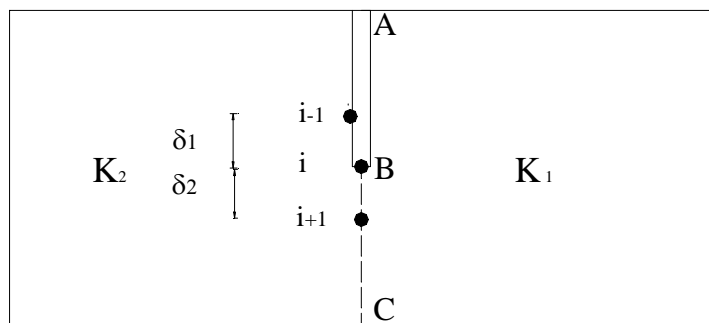
$$K_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -K_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \quad (12)$$

ضریب هدایت هیدرولیکی ناحیه ۱، $\left[\frac{L}{T}\right] - K_2$ ضریب هدایت هیدرولیکی ناحیه ۲

در این مدل از معادلات سازگاری استفاده شده است، زیرا سدی همگن روی پی لایه‌ای در نظر گرفته شده است که ضریب هدایت هیدرولیکی پی با ضریب هدایت هیدرولیکی سد متفاوت است که در مرز مشترک این لایه‌ها، معادلات سازگاری بکار رفته است.

در حالتی که سپری در زیر سد وجود دارد. بهترین راه حل آنست که پی را دو ناحیه‌ای در نظر گرفته که نقاط روی سپری به عنوان مرز خارجی با شرط $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ و نقاط زیر سپری به عنوان مرز داخلی بین دو ناحیه در نظر گرفته شود که معادلات سازگاری باید در این مرز داخلی نوشته شود.

شکل (۳) یک سپری را با مشخص کردن دو المان مخصوص نشان می‌دهد که محیطی که سپری در آن قرار دارد به دو ناحیه تقسیم می‌شود.



شکل ۳- سپری و المانهای مخصوص آن

با توجه به شکل ۳- شرایط مرزی زیر برقرار است:

$$AB: \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (13)$$

$$BC: \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ K_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -K_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \end{cases} \quad (14) \text{ و } (15)$$

که با داشتن این شرایط مرزی و شرایط مرزی دیگر در مرزهای دیگر ناحیه، مسأله قابل حل است.

در حالت معمول برنامه‌های روش المانهای مرزی از اینترپلاسیون خطی برای φ و $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ بین گره‌ها استفاده

می‌کنند، ولی اگر رفتار توابع پتانسیل و یا مشتق نرمال پتانسیل در المانهای مشخص باشد، برای دقت بیشتر می‌توان از آن توابع مخصوص استفاده کرد. برای مثال در حالتی که سپری در زیر سد وجود دارد، برای بهتر شدن جوابها می‌توان از المان مخصوص در نوک سپری و زیر سپری استفاده کرد.

همانطور که در شکل (۳) دیده می شود در المان $(i-1)$ ام که بین گره $i-1$ و i می باشد و المانی است که روی سپری قرار دارد و شامل نوک سپری می باشد، تابع پتانسیل φ مانند تابع زیر رفتار می کند :

$$\varphi = \left(\frac{r}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{2}} \varphi_{i-1} + \left(1 - \left(\frac{r}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \varphi_i \quad (16)$$

$\delta_1 - [L]$ طول المان $(i-1)$ ام، $r - [L]$ فاصله روی المان $(i-1)$ ام که از گره $(i-1)$ محاسبه می شود.

در المان i ام که بین گره i و $i+1$ می باشد و المانی در زیر سپری می باشد، مانند تابع زیر رفتار می کند :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \left(\frac{\delta_2}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{i+1} \quad (17)$$

$\delta_2 - [L]$ طول المان i ام، $r - [L]$ فاصله روی المان i ام که از گره i سنجیده می شود.

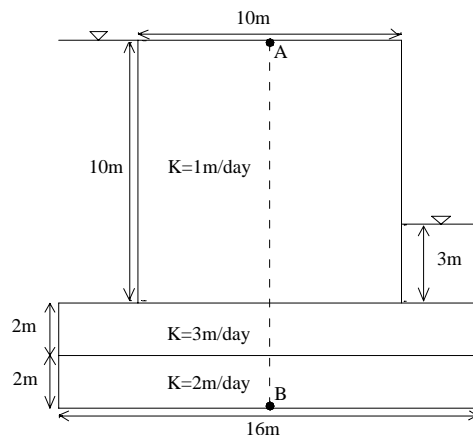
که از این المانهای خاص برای مدل کردن سپری در مدل استفاده شده است.

۴- ارزیابی نتایج مدل :

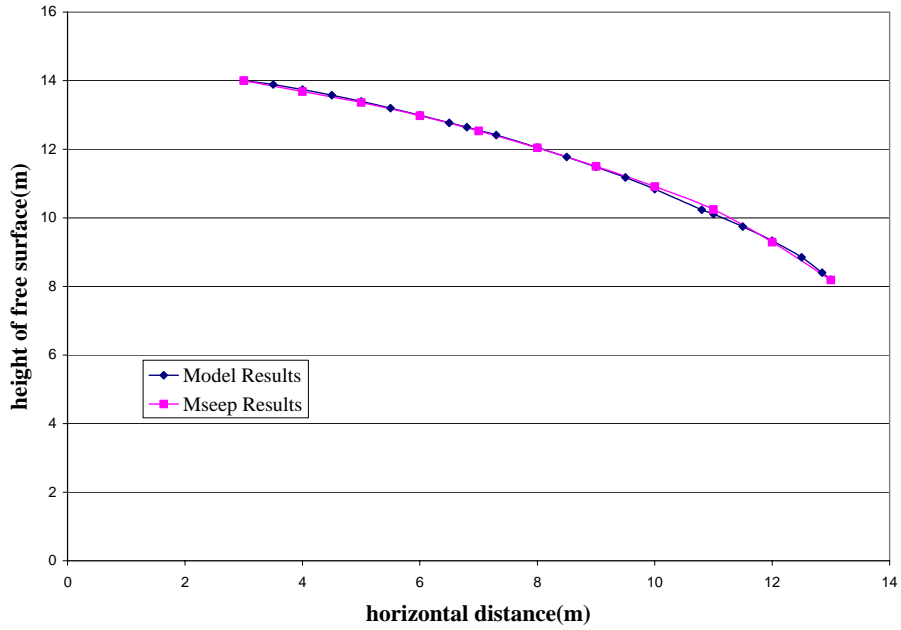
برای ارزیابی مدل دو مثال با مدل حل شده و با نتایج نرم افزار Mseep که از روش المانهای محدود برای محاسبات استفاده می کند، مقایسه شده است. (دو مثال تحلیلی و آزمایشگاهی برای نشان دادن صحت مدل در مرجع [۶] آمده است).

۴-۱- مثال ۱ :

شکل (۴) سدی مستطیلی و همگن به طول و ارتفاع ۱۰ متر را نشان می دهد که روی پی ای به طول ۱۶ متر و ارتفاع ۴ متر قرار داده شده است و این پی دو لایه ای می باشد که در ارتفاع ۲ متری به دو لایه تقسیم شده است. ضریب هدایت هیدرولیکی در لایه پایینی پی $\frac{2}{day}$ و در لایه بالایی پی $\frac{3}{day}$ و درون سد $\frac{1}{day}$ فرض شده است. با استفاده از این مدل سطح آزاد بدست آمده و با نتایج نرم افزار Mseep مقایسه شده است که نمودار آن در شکل (۵) نشان داده شده است.



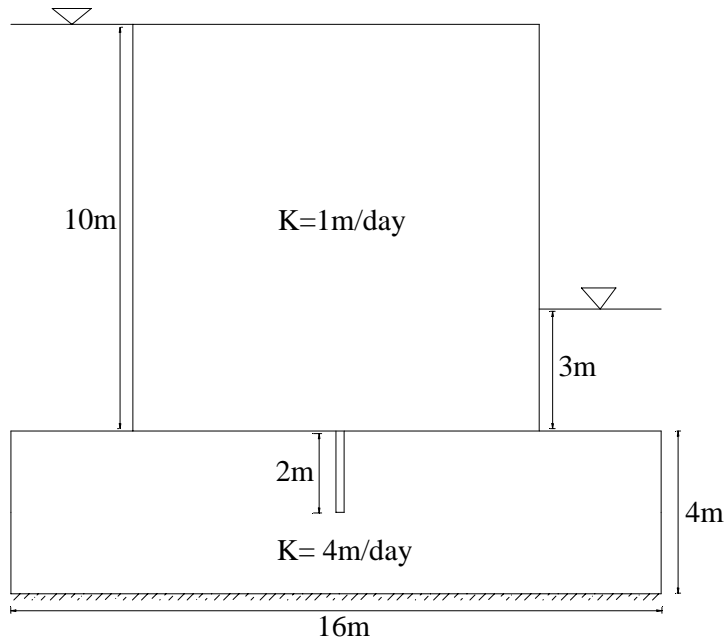
شکل ۴- سدی مستطیلی بر روی پی دو لایه ای



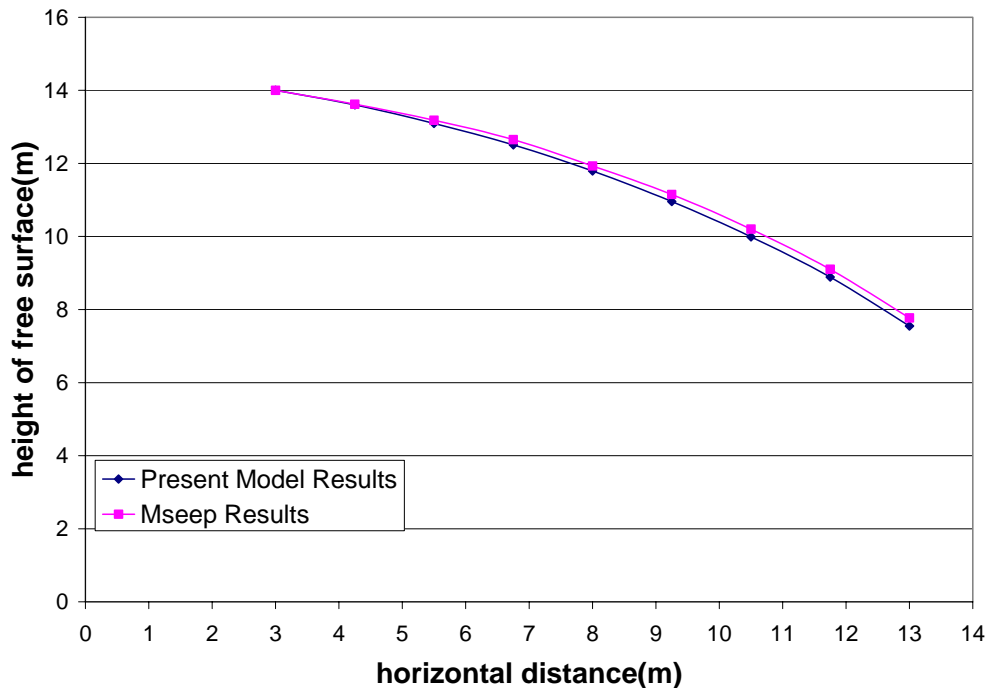
شکل ۵- مقایسه نتایج مدل با نرم افزار Mseep

۴-۲- مثال ۲:

شکل (۶) سدی همگن مستطیلی به طول و ارتفاع ۱۰۰ متر را نشان می‌دهد که روی پی‌ای به طول ۱۶ متر و ارتفاع ۴ متر قرار داده شده است. در زیر سد یک سپری به ارتفاع ۲ متر قرار داده شده است. ضریب هدایت هیدرولیکی پی $4 \frac{m}{day}$ و ضریب هدایت هیدرولیکی سد $1 \frac{m}{day}$ فرض شده است. با استفاده از مدل، سطح آزاد در سد بدست آمده و با نتایج نرم‌افزار Mseep مقایسه شده است که نمودار آن در شکل (۷) نشان داده شده است.



شکل ۶- سدی مستطیلی بر روی پی شامل سپری



شکل ۲- مقایسه نتایج مدل با نرم افزار Mseep

مقایسه نتایج حاصل، موفقیت مدل را در شبیه‌سازی جریان تراوش در سدهای خاکی با پی لایه‌ای و سپری نشان می‌دهد.

۵- خلاصه و نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل عددی تهیه شده جهت جریان تراوش در سد خاکی همراه با شالوده لایه‌ای و سپری با استفاده از روش المانهای مرزی ارائه گردید. روابط حاکم و شکل معادلات برای حالت همگن و غیرهمگن توصیف گردید و با استفاده از مدل عددی دو مثال تراوش در سد خاکی همگن با پی لایه‌ای و سپری تحلیل گردید که نتایج حاصله با نتایج نرم‌افزار Mseep تطابق دارند و صحت نتایج مدل عددی را تأیید می‌نمایند.

۶- مراجع

- 1-Liggett, J. A. 1987. Advances in the Boundary Integral Equation Method in Subsurface Flow. Water Resources bulletin, 23(4):637-651.
- 2- Bruch, J. C. 1979, Survey of Free Boundary Value Problems in the theory of Fluid Flow through Porous media. Variational inequality approach – Part I, Advances in water Resources, 3:63-81.
- ۳- حائری، س. م. ۱۳۶۳. اصول طرح سدهای خاکی. انتشارات گروه مهندسی عمران.
- 4 -Liggett, J. A. & P. Liu. 1984. The Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow. Londen: George Allen and unwin Ltd.
- 5-Medina, D. E., M. H. Lean, J. A. Liggett. 1990. Boundary Elements in zoned media: Direct and indirect Methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, (29):1727-1735.
- ۶- شریفی، ا. و ب. عطایی آشتیانی، "مدل عددی المان مرزی در تحلیل تراوش در بدنه سد خاکی ناهمگن"، چهارمین کنفرانس هیدرولیک ایران، صص. ۷۴۴-۷۳۷، شیراز، ۱۳۸۲.